参赛队员：　　邵恩华、王佳希、伊莎

学校：　　　北京市十一学校

省份：　　　北京市

指导教师：　　　　李铁汉

论文题目：

椭圆外一点到椭圆距离的最值问题初探

论文题目：椭圆外一点到椭圆距离的最值问题初探

摘要：

本文从“椭圆外一点到椭圆距离的最值”这一问题入手，首先尝试了多种代数方法求解最值，均化归为求四次方程实数解的问题，此后利用 Excel 制作出求解四次方程根的程序。我们在研究过程中发现了若干简洁的几何性质，借此给出了 4 种有限定条件的椭圆外点的最值。最后，我们找到了一个对于一般的点的结论。此外，我们还发现网络上关于最值点为费马点的猜想是不正确的，并给出了相应证明。

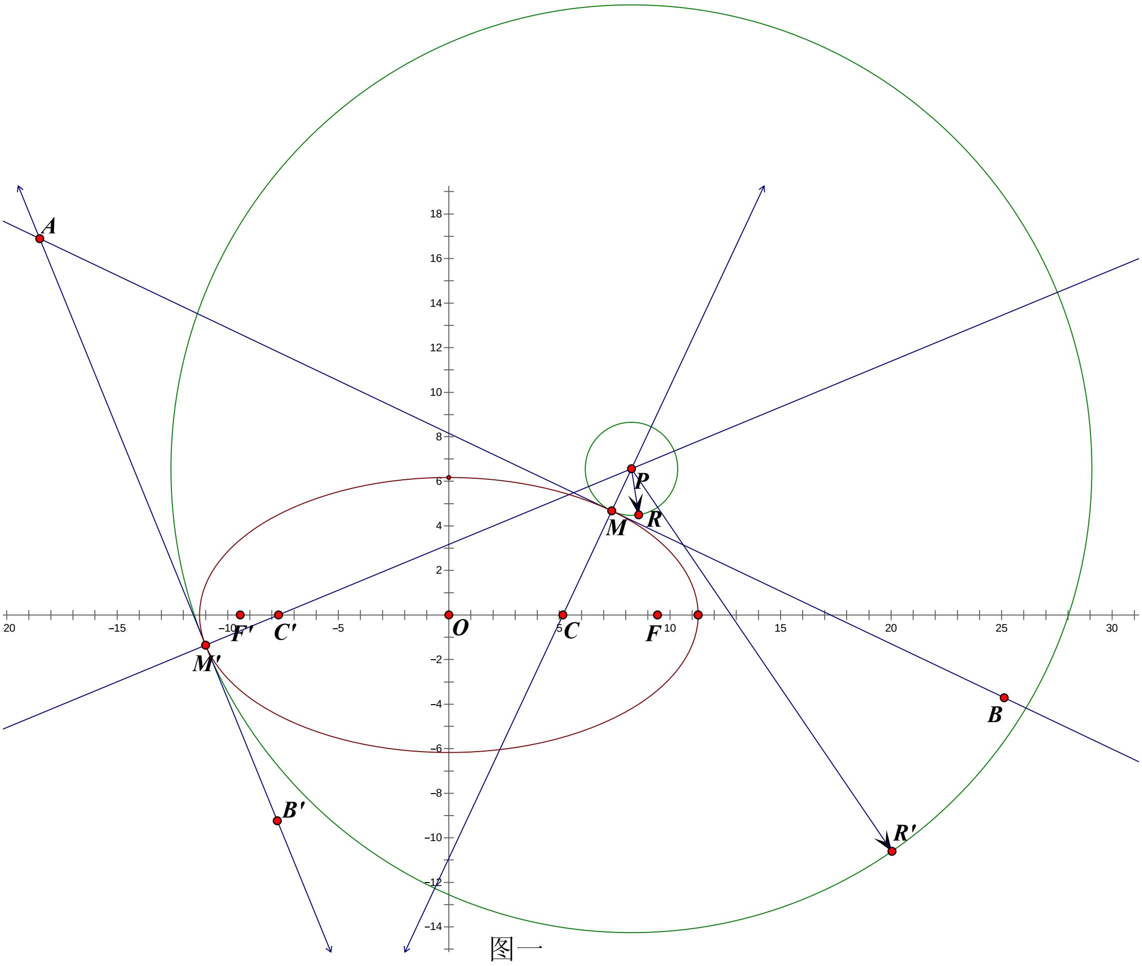
Abstract

The problem of the shortest and longest distance between an ellipse and a fixed point out of the ellipse is discussed in this paper. Substantially, it can be turned to another problem of solving equations of degree four. Next, we write a tool of solving the equations in Excel. In addition, we discover some geometric properties. According to these properties, we can solve this problem easily in some special cases and finally find the approach to the common problem. During the course of the research, we also point out a false statement on the Internet and falsify it.

本文中所讨论的椭圆外的定点均在第一象限，其余三个象限与之类似。

讨论如下命题：已知椭圆及椭圆外一点 $P(m,n)$，求 P 到椭圆上一动点的最小（大）距离。

如图一：



图一

显然可分析出如下结论，

以 P 为圆心作圆使圆与椭圆外切，设切点为 M。再以 P 为圆心作圆使圆与椭圆内切，设切点为 M'。可知最短距离为 $|PM|$，最长距离为 $|PM'|$。

作过 M 的切线 l_{AB}，延长 $|PM|$ 交 x 轴于 C 点。只要确定下 M 点或是 C 点，就可以算出 P 到椭圆的最小（大）距离。

对于最小值点，有如下性质：（最大值与最小值相同，在此不予赘述）

①直线 AB 为椭圆与圆的公切线。所以有 $AB \perp PM$。

②一旦确定直线 CM，则对于这条直线上的任意一点 P（P 在椭圆外），直线 AB 都为其对应圆与椭圆的公切线，即在一定直线上拖动的 P 点所对应的 C、M 两点一定，我们说，P 点有“拖动不变性”。

一、求距离的几种方法

方法一

设 $M\left(x_0,y_0\right)$

$$f\left(x\right)=|PM|^2=\left(m-x_0\right)^2+\left(n-y_0\right)^2=m^2+n^2-2mx_0-2ny_0+x_0{}^2+y_0{}^2$$

对椭圆上 M 点有：$\dfrac{x_0{}^2}{a^2}+\dfrac{y_0{}^2}{b^2}=1$

消 y^2 后带入函数即：$f(x)=m^2+n^2-2mx_0+x_0{}^2+b^2-\dfrac{b^2}{a^2}x_0{}^2-2n\sqrt{b^2-\dfrac{b^2}{a^2}x_0{}^2}$

求函数最值，令其导函数为零

$$f'(x)=-2m+2(1-\frac{b^2}{a^2})x_0+2n\frac{b^2}{a^2}x_0\frac{1}{\sqrt{b^2-\frac{b^2}{a^2}x_0{}^2}}=0$$

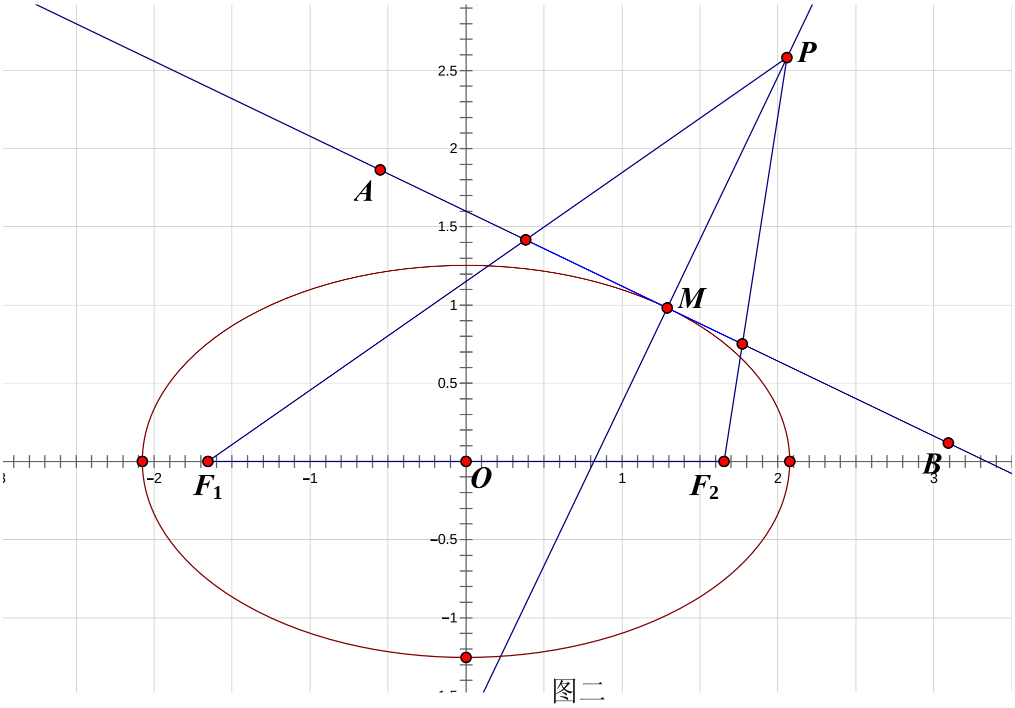
$$\left[-2m+2(1-\frac{b^2}{a^2})x_0\right]^2=\left[2n\frac{b^2}{a^2}x_0\frac{1}{\sqrt{b^2-\frac{b^2}{a^2}x_0{}^2}}\right]^2$$

$$4m^2-8m(1-\frac{b^2}{a^2})x_0+\left[2(1-\frac{b^2}{a^2})x_0\right]^2=\frac{4n^2\frac{b^4}{a^4}x_0{}^2}{b^2-\frac{b^2}{a^2}x_0{}^2}$$

易知，上式为以 x_0 为自变量的四次方程。

从图一可看出该四次方程有两个实根，两个虚根。其中两个实根为一正根、一负根，分别为 M,M' 的横坐标。

方法二



图二

引理：若 M （$a\cos\theta$，$b\sin\theta$）为椭圆上一点，则过点 M 的椭圆的切线的方程为：

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$$

如图二：设椭圆外一点 P， M 为所求的最小值点，作 M 点的切线 l_{AB}。

设 M （$a\cos\theta$，$b\sin\theta$），(不妨取 $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$)。已证在取到极值时满足相切 $AB\perp PM$，即斜率乘积为-1。

则切线 AB 的方程，$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$；MP 的斜率 $k_{MP}=\frac{n-y_0}{m-x_0}$。

$$k_{AB}=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$$

$$\Rightarrow k_{AB}\cdot k_{MP}=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}\cdot\frac{n-y_0}{m-x_0}=-1$$

带入 x_0， y_0 坐标即：$\frac{a}{b}\tan\theta=\frac{n-b\sin\theta}{m-a\cos\theta}$

令 $c^2=a^2-b^2$， $x=\tan\frac{\theta}{2}$，带入万能公式：$\sin\theta=\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$ $\tan\theta=\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}$

化简得 $mbx^4+2\left(an+c^2\right)x^3+2\left(an-c^2\right)x-mb=0$

方法三

设 $P(m,n)$， $M(x_0,y_0)$，椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

同上做法可知：$k_{AB}\cdot k_{MP}=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}\cdot\frac{n-y_0}{m-x_0}=-1$

解得：$y_0=-\frac{nb^2x_0}{c^2x_0-ma^2}$

而点 M 在椭圆上，所以有 ${y_0}^2=b^2(1-\frac{{x_0}^2}{a^2})$，与前式联立，得到关于 x_0 的四次函数：

$$c^4{x_0}^4-2ma^2c^2{x_0}^3+\left(n^2a^2b^2+m^2a^4-a^2c^4\right){x_0}^2+2ma^4c^2x_0-a^6m^2=0$$

分析求得的上面三个四次方程，为形如 $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ 的四次函数，我们知道四次方程的求根公式如下，所以我们对最后一个式子采取了运用求根公式的方法运算可以求得我们需要的解，我们用excel编辑了一个可以运算这个的表格，详见..\Book1.xls

令 $\Delta_1=c^2-3bd+12ae$

$\Delta_2=2c^3-9bcd+27ad^2+27b^2e-72ace$

$$\Delta=\frac{\sqrt[3]{2}\Delta_1}{3a\sqrt[3]{\Delta_2+\sqrt{-4\Delta_1^3+\Delta_2^2}}}+\frac{\sqrt[3]{\Delta_2+\sqrt{-4\Delta_1^3+\Delta_2^2}}}{3\sqrt[3]{2}a}$$

$$x_1=\frac{-b}{4a}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{2c}{3a}+\Delta}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b^2}{2a^2}-\frac{4c}{3a}-\Delta-\frac{-\frac{b^3}{a^3}+\frac{4bc}{a^2}-\frac{8d}{a}}{4\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{2c}{3a}+\Delta}}}$$

$$x_2=\frac{-b}{4a}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{2c}{3a}+\Delta}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b^2}{2a^2}-\frac{4c}{3a}-\Delta-\frac{-\frac{b^3}{a^3}+\frac{4bc}{a^2}-\frac{8d}{a}}{4\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{2c}{3a}+\Delta}}}$$

$$x_3=\frac{-b}{4a}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{2c}{3a}+\Delta}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b^2}{2a^2}-\frac{4c}{3a}-\Delta+\frac{-\frac{b^3}{a^3}+\frac{4bc}{a^2}-\frac{8d}{a}}{4\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{2c}{3a}+\Delta}}}$$

$$x_4=\frac{-b}{4a}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{2c}{3a}+\Delta}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b^2}{2a^2}-\frac{4c}{3a}-\Delta+\frac{-\frac{b^3}{a^3}+\frac{4bc}{a^2}-\frac{8d}{a}}{4\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{2c}{3a}+\Delta}}}$$

二、探索使距离最短(长)的椭圆上的点的性质

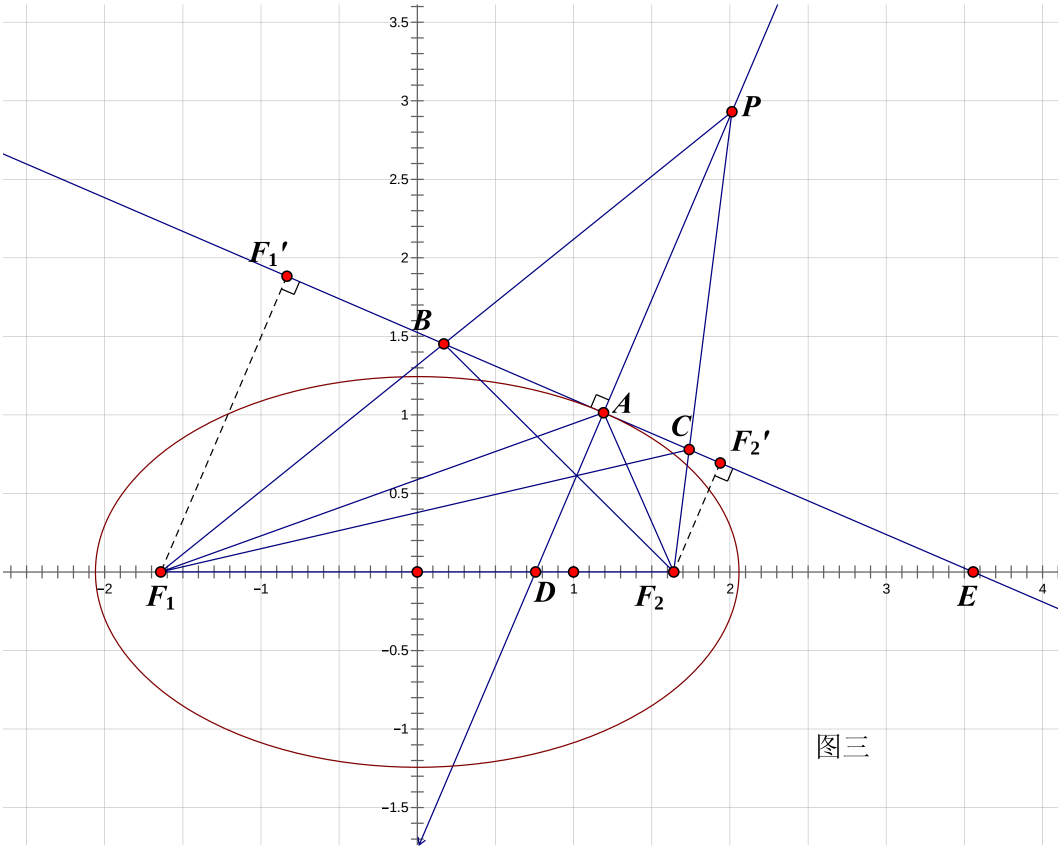
由于四次方程的求根公式过于繁琐，只能从理论上解决问题，实际上的可操作性很小，所以我们试图讨论它的几何性质，希望借此求出极值点。

在定点与椭圆焦点连线的三角形内所求点有如下的性质：

性质一： 如图三，P 为定点，F_1、F_2 为椭圆焦点，直线 BC 为 A 点处切线，使 $PA \perp BC$，

$|AP|$ 即为所求最短距离，B 为 A 点处切线与 PF_1 交点，C 为 A 点处切线与 PF_2 交点。

下证：BF_2，F_1C，PD 三线共点。



图三

证明：由椭圆光学性质知：$\angle BAF_1 = \angle CAF_2$，

$\therefore AD$ 为 $\angle F_1AF_2$ 的角分线

$\because PD \perp AE$

$\therefore AE$ 为 $\angle F_1AF_2$ 的外角平分线

$$\therefore \frac{DF_1}{DF_2} = \frac{AF_1}{AF_2} = \frac{EF_1}{EF_2}$$

如图，过 F_1，F_2 作直线 $F_1F_1' \perp BC$ 于 F_1'，$F_2F_2' \perp BC$ 于 F_2'

$\therefore \frac{BP}{BF_1}=\frac{AP}{F_1F_1'}$ ①

$\frac{DF_1}{DF_2}=\frac{EF_1}{EF_2}=\frac{F_1F_1'}{F_2F_2'}$ ②

$\frac{F_2C}{CP}=\frac{F_2F_2'}{AP}$ ③

$\therefore \frac{BP}{BF_1}\cdot\frac{DF_1}{DF_2}\cdot\frac{F_2C}{CP}=1$

则由塞瓦定理逆定理知，BF_2，F_1C，PD 三线共点。

而若已知 BF_2，F_1C，PD 三线共点，且 $AP\perp BC$。

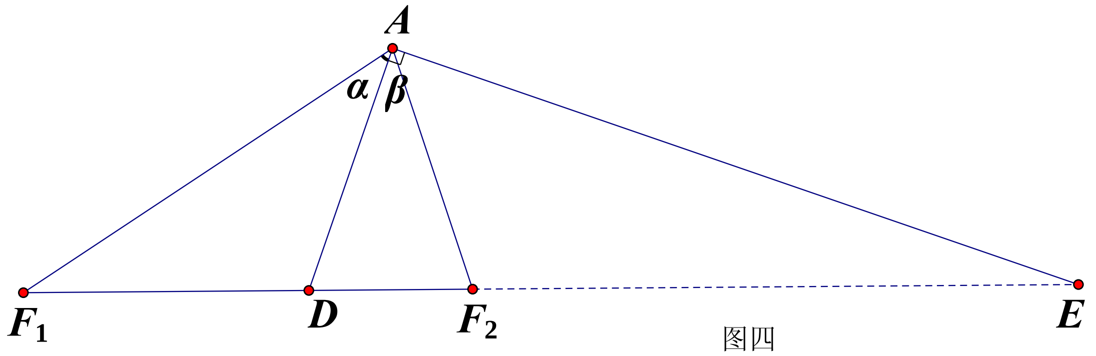
下证：点 A 在以 F_1、F_2 为焦点的椭圆上。

证明：由塞瓦定理知，$\frac{BP}{BF_1}\cdot\frac{DF_1}{DF_2}\cdot\frac{F_2C}{CP}=1$

同上作辅助线，由①、③式知：$\frac{BP}{BF_1}\cdot\frac{F_2C}{CP}=\frac{F_2F_2'}{F_1F'_1}$

$\frac{DF_1}{DF_2}=\frac{F_1F_1'}{F_2F_2'}=\frac{EF_1}{EF_2}$

知：D，E 调和分割 F_1、F_2



图四

如图四，设 $\angle F_1AD=\alpha$ ，$\angle F_2AD=\beta$

在 ΔADF_1 中，由正弦定理：$\frac{DF_1}{\sin\alpha}=\frac{AF_1}{\sin\angle ADF_1}$

在ΔADF_2中，由正弦定理：$\dfrac{DF_2}{\sin\beta}=\dfrac{AF_2}{\sin\angle ADF_2}$

$\because \sin\angle ADF_1=\sin\angle ADF_2$；$\therefore \dfrac{AF_1\cdot\sin\alpha}{AF_2\cdot\sin\beta}=\dfrac{DF_1}{DF_2}=\dfrac{EF_1}{EF_2}$

在ΔAEF_1中，由正弦定理：$\dfrac{AF_1}{\sin\angle AED}=\dfrac{EF_1}{\sin\left(\alpha+90^\circ\right)}$

在ΔAEF_2中，由正弦定理：$\dfrac{AF_2}{\sin\angle AED}=\dfrac{EF_2}{\sin\left(90^\circ-\beta\right)}$

$$\frac{AF_1\cdot\cos\alpha}{AF_2\cdot\cos\beta}=\frac{EF_1}{EF_2}=\frac{AF_1\cdot\sin\alpha}{AF_2\cdot\sin\beta}$$

$\therefore \cos\alpha\sin\beta-\sin\alpha\cos\beta=0$

$\therefore \sin\left(\alpha-\beta\right)=0\Rightarrow\alpha=\beta$

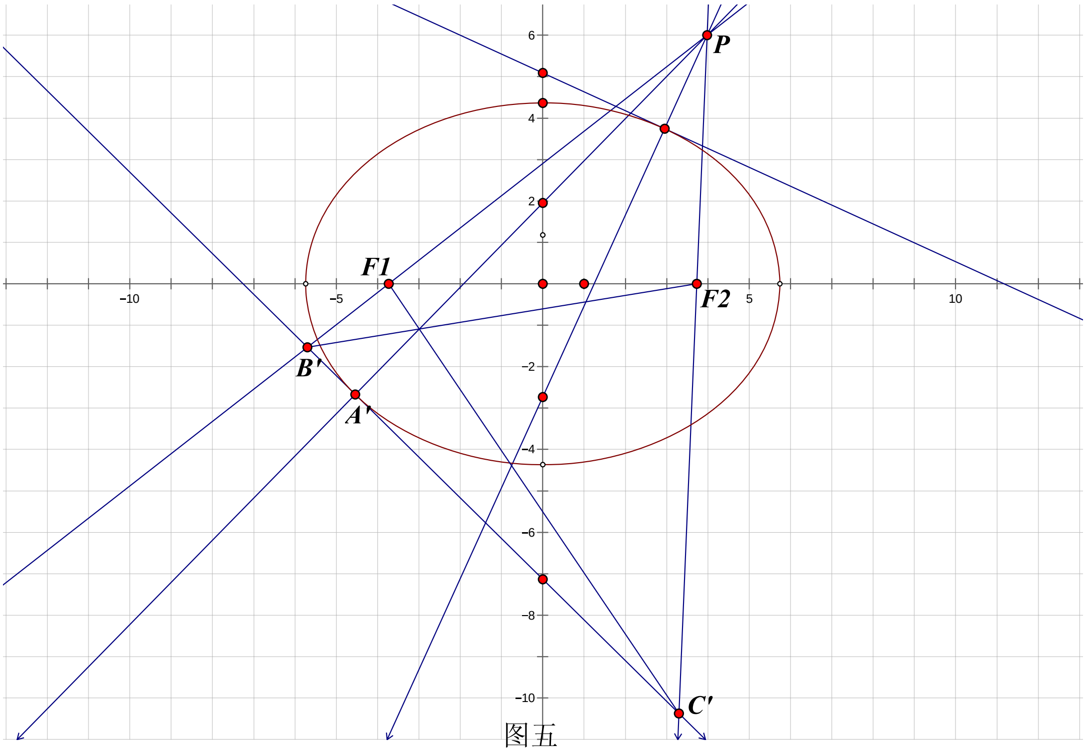
$\therefore AD$为$\angle F_1AF_2$的角分线；$\therefore \angle BAF_1=\angle CAF_2$

由椭圆光学性质知：A点在以F_1、F_2为焦点的椭圆上。

所以说，在ΔF_1PF_2内点A及$PA\perp BC$，BF_2，F_1C，PD三线共点$\Leftrightarrow$ A点在以F_1、F_2为焦点的椭圆上。

但是我们并不能仅由此得到A点所在的椭圆，因为在证明过程中，没有用到到焦点和为定长的这一条件，就是说只能判定A在以F_1、F_2为焦点的椭圆上，但是椭圆的形状不能确定。

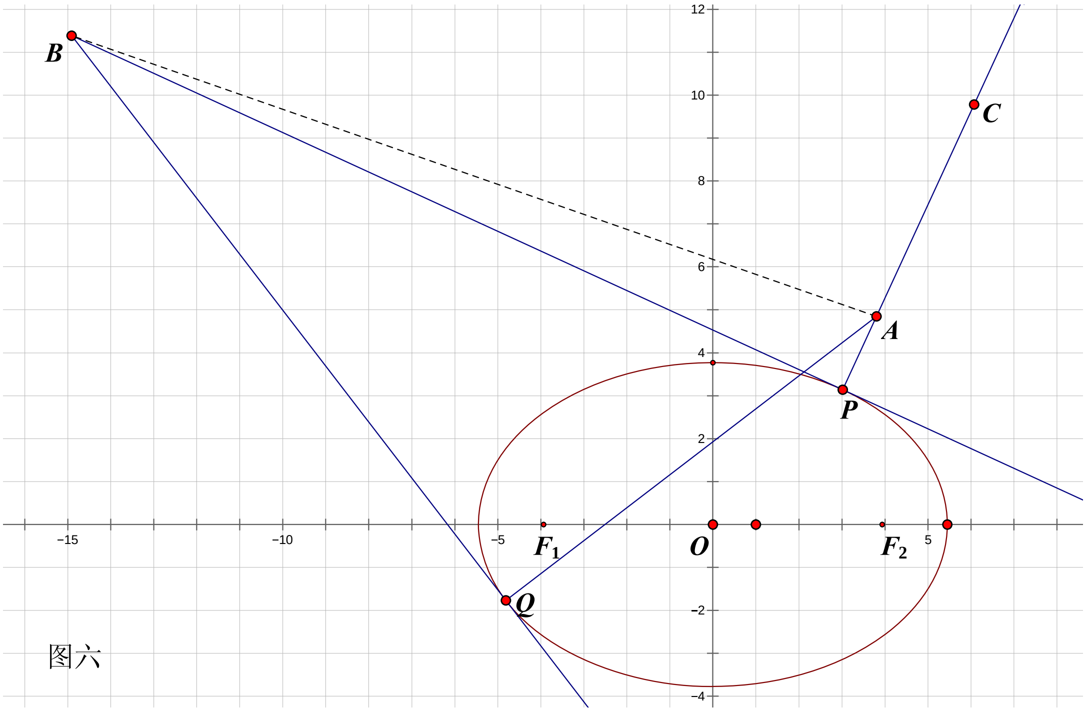
如图五，对于取到最大值点的A'，同样有PA，$B'F_2$，F_1C'共点，证明同上。



图五

性质二：关于 A 点与它的陪衬点。

如下图所示，当点 A 在射线 PC（其中 PC 不与坐标轴重合）上运动时，A 点与椭圆上最小值点仍为 P 点，但显然最大值点却不再是 Q 点。这意味着最大值点 Q 与最小值点 P 是相互独立的，不相关的。但是我们却发现最大值与最小值却可以由与 A 相关的一个点 B 确定。我们可以将它称为点 A 的陪衬点。



图六

定义：若 P 、Q 分别是 A 到椭圆距离的最小值点，最大值点。

过 P 、Q 分别作椭圆的切线相交于点 B，称 B 是 A 的陪衬点

显然若 A 确定，则 B 点确定（但反之若 B 确定，点 A 未必在椭圆外）

定理一：

若 A 到椭圆的最大值为 $d_{\max}$，最小值为 $d_{\min}$。A 的陪衬点 B 与两切点的距离为 L_1, L_2，

则 $L_1^{\ 2}+d_1^{\ 2}=L_2^{\ 2}+d_2^{\ 2}$。

证明很容易由两个直角三角形共斜边推导。

且由 $PC\perp PB, AQ\perp QB$ 知，A、P、Q、B 四点共圆。

由此可知 $\angle PBQ=\angle PAQ$，即定点 A 到椭圆距离的最大值点与最小值点的连线的夹角等于陪衬点 B 到椭圆的两条切线的夹角。

定理二：

设 A 的坐标为 (x_0, y_0)，其陪衬点 B 的坐标为 $\left(x', y'\right)$，则有 $x'=\dfrac{a^4}{c^2}\cdot\dfrac{x_0}{x_P x_Q}$，$y'=\dfrac{b^4}{c^2}\cdot\dfrac{y_0}{y_P y_Q}$

证明：取 $P\left(a\cos\alpha, b\sin\alpha\right)$，$Q\left(a\cos\beta, b\sin\beta\right)$

$$l_{PB}:\frac{x\cos\alpha}{a}+\frac{y\sin\alpha}{b}=1，即\ y=-\frac{b\cos\alpha}{a\sin\alpha}x+\frac{b}{\sin\alpha}$$

$$l_{QB}:\frac{x\cos\beta}{a}+\frac{y\sin\beta}{b}=1，即\ y=-\frac{b\cos\beta}{a\sin\beta}x+\frac{b}{\sin\beta}$$

联立上面两个式子得：$B\left(\dfrac{a\left(\sin\alpha-\sin\beta\right)}{\sin\left(\alpha-\beta\right)}, \dfrac{b\left(\cos\alpha-\cos\beta\right)}{\sin\left(\alpha-\beta\right)}\right)$

$$l_{PA}:y=\frac{a\tan\alpha}{b}\left(x-a\cos\alpha\right)+b\sin\alpha，即\ y=\frac{a\tan\alpha}{b}x-\frac{c^2}{b}\sin\alpha$$

$$l_{QA}:y=\frac{a\tan\beta}{b}\left(x-a\cos\beta\right)+b\sin\beta，即\ y=\frac{a\tan\beta}{b}x-\frac{c^2}{b}\sin\beta$$

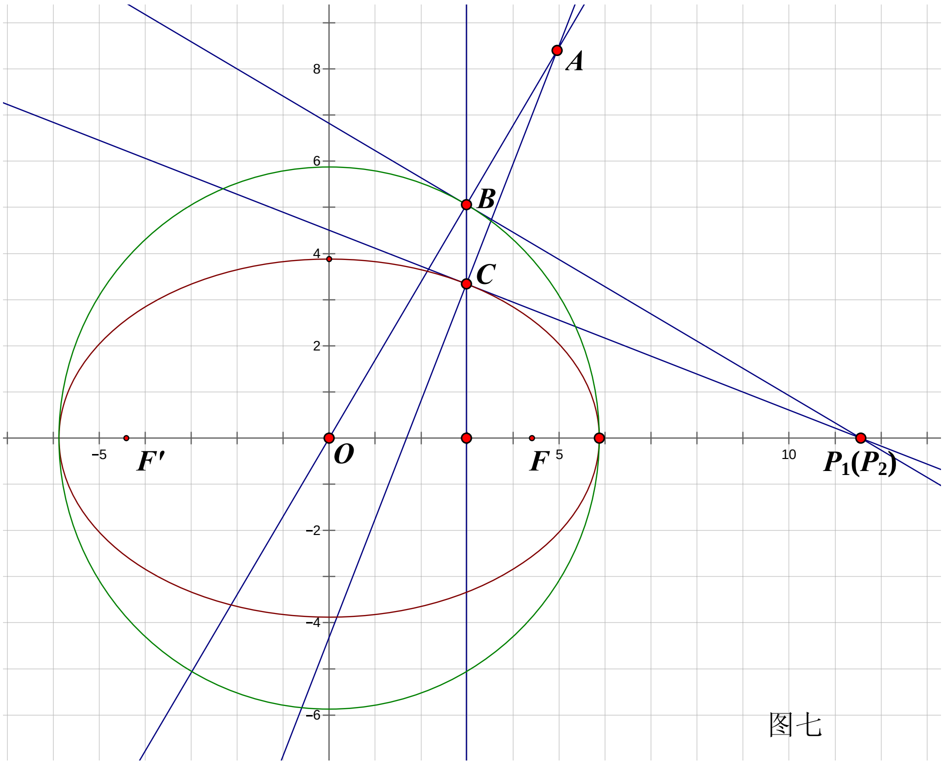
联立上面两个式子得：$A\left(\dfrac{c^2\cos\alpha\cos\beta\left(\sin\alpha-\sin\beta\right)}{a\sin\left(\alpha-\beta\right)}, \dfrac{c^2\sin\alpha\sin\beta\left(\cos\alpha-\cos\beta\right)}{a\sin\left(\alpha-\beta\right)}\right)$

$$\therefore \frac{x'}{x_0}=\frac{a^2}{c^2}\cdot\frac{1}{\cos\alpha\cos\beta}=\frac{a^4}{c^2}\cdot\frac{1}{a\cos\alpha\cdot a\cos\beta},$$

$$\frac{y'}{y_0}=\frac{b^2}{c^2}\cdot\frac{1}{\sin\alpha\sin\beta}=\frac{b^4}{c^2}\cdot\frac{1}{b\sin\alpha\cdot b\sin\beta}$$

即得 A 点和 B 点的坐标关系 $x'=\frac{a^4}{c^2}\cdot\frac{x_0}{x_P x_Q}$， $y'=\frac{b^4}{c^2}\cdot\frac{y_0}{y_P y_Q}$ 。

性质三



图七

如图所示，点 A 为椭圆外一点，做出椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 和圆 $x^2+y^2=a^2$，连接原点 O 和点 A，交圆 $x^2+y^2=a^2$ 与点 B，过 B 做垂直于 x 轴的直线与椭圆在第一象限交于点 C，则 B 处的切线与 C 处的切线与 x 轴三线共点。

证明：

设 $A\ (x_0,y_0)$,$x_{0,}y_0>0$，则 $l_{AB}:y=\frac{y_0}{x_0}x$，

与圆方程 $x^2+y^2=a^2$ 联立得 $B(\frac{a}{a+b}x_0,\frac{a}{a+b}y_0)$

则 B 处切线 $l_1:\frac{a}{a+b}x_0x+\frac{a}{a+b}y_0y=a^2$，即 $x_0x+y_0y=a\cdot(a+b)$

与 x 轴交于 $P_1\ \ (\frac{a(a+b)}{x_0},0)$

而由 B 点可求得 $C(\frac{a}{a+b}x_0,b\sqrt{1-\frac{{x_0}^2}{(a+b)^2}})$

过点C做椭圆的切线l_2与x轴交于P_2 ，

则$l_2:\dfrac{\frac{a}{a+b}x_0x}{a^2}+\dfrac{b\sqrt{1-\frac{{x_0}^2}{(a+b)^2}}y}{b^2}=1$，即$\dfrac{x_0x}{a(a+b)}+\dfrac{\sqrt{1-\frac{{x_0}^2}{(a+b)^2}}y}{b}=1$

与x轴交于P_2 $(\dfrac{a(a+b)}{x_0},0)$。

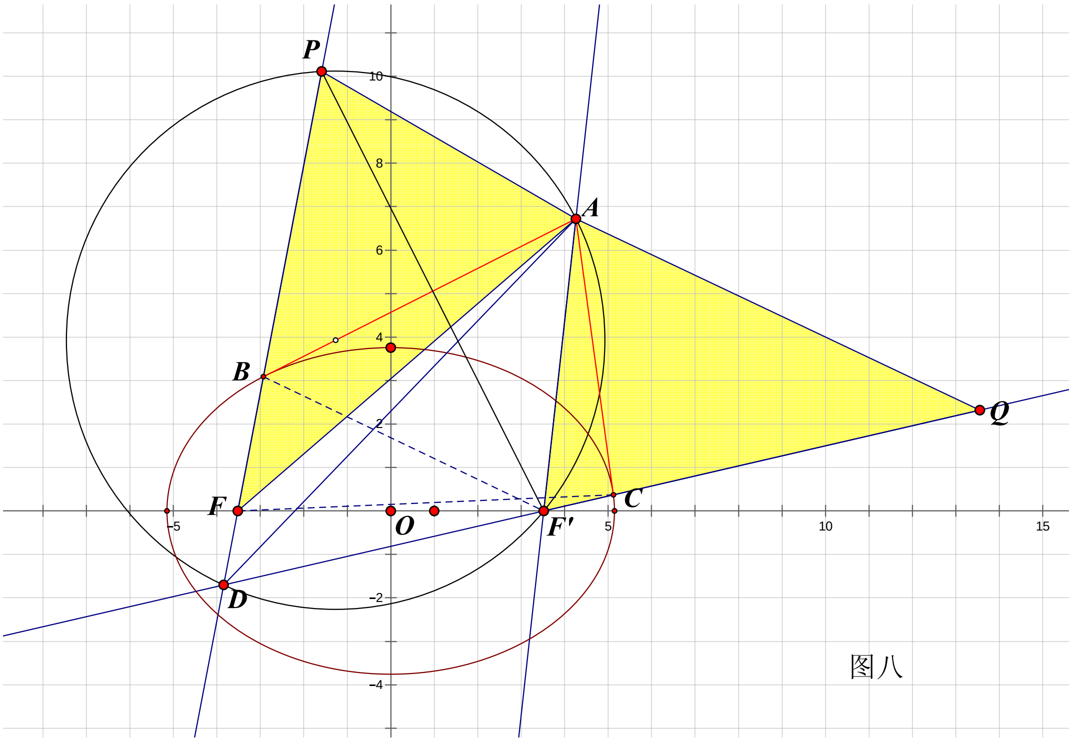
则可知P_1与P_2重合，则原命题成立。

（此命题还易由仿射变换证明）

这个性质意味着，过椭圆上任意一点$C(a\cos\theta,b\sin\theta)$做切线，与$x$轴交于$P_1$，过$P_1$作

$x^2+y^2=a^2$的切点得到切点B，则l_{BC}一定与x轴垂直。

性质四：



图八

已知椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$及其左右焦点$F,F'$，过圆外一点$A$作椭圆的两条切线交椭圆于$B$、

C两点，直线$l_{BF},l_{CF'}$交与点D，则AD平分$\angle BDC$。

证明：将右焦点F'关于切线l_{AB}对称到点P，将左焦点F关于切线l_{AC}对称到点Q，如图

连接AF'，AQ，QF'，BF'，AP，AF，PF，CF。

由椭圆光学性质易知，P、B、F 共线，F'、C、Q 共线。

$\because PB = PF', CF = CQ$

$\therefore PF = QF' = 2a$

而 $AF' = AP, AF = AQ$，则 $\Delta APF \cong \Delta AF'Q$

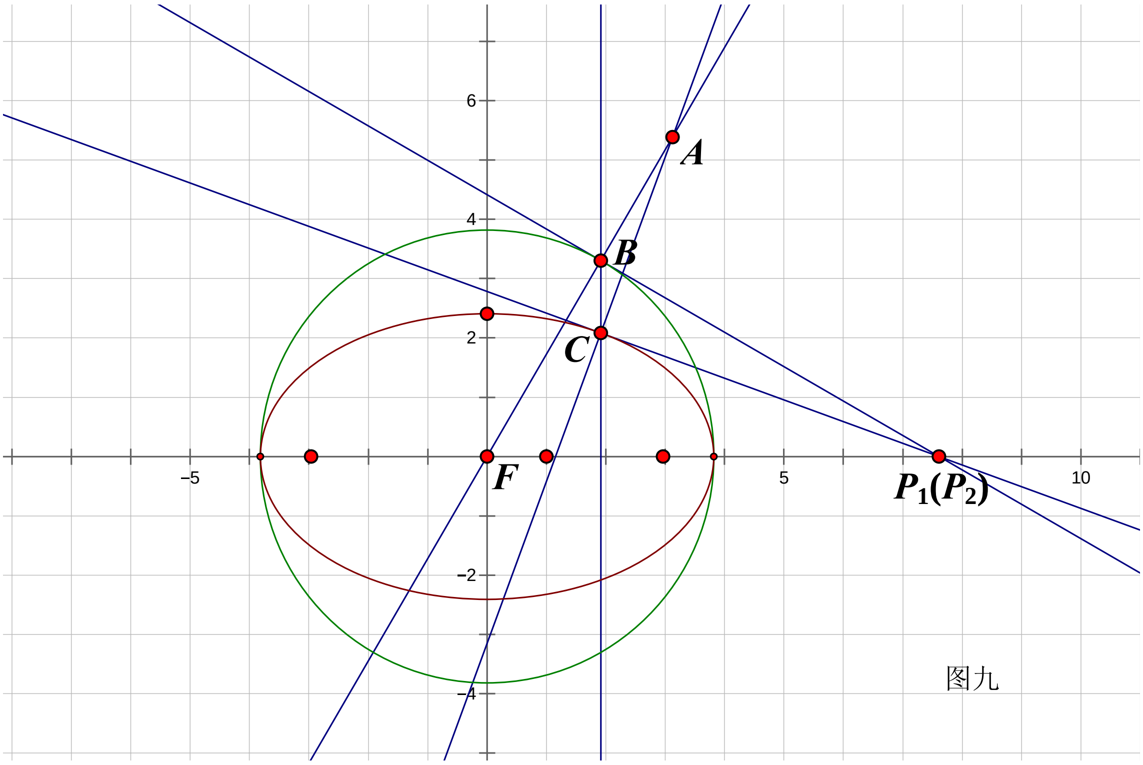
$\therefore \angle APF = \angle AF'Q \quad \therefore A, P, D, F'$ 四点共圆

而 $AF' = AP$，$\therefore \angle APF' = \angle AF'P$，$\therefore \angle ADC = \angle APF' = \angle AF'P = \angle ADB$
得证。

三、探索一些特殊的点到椭圆的最短(长)距离

对于一些有特定限制的点，上述四次方程就可以得到化简进而得出简洁的解。

（一）取为点 A (x_0, y_0)，点 A 在轨迹 $x^2 + y^2 = (a+b)^2$ 上，这类特殊点到椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的最短距离是 $\frac{\sqrt{b^2 x_0 + a^2 y_0}}{a+b}$。



图九

证明：

方法一：

由性质三可知，当 A (x_0, y_0) 时，且点 A 在轨迹 $x^2 + y^2 = (a+b)^2$ 上，最小值点 C 即为

$C(\frac{a}{a+b}x_0,\frac{b}{a+b}y_0)$，

所求距离 $d=\sqrt{(x_0-\frac{a}{a+b}x_0)^2+\left(y_0-\frac{b}{a+b}y_0\right)^2}=\frac{\sqrt{b^2x_0+a^2y_0}}{a+b}$

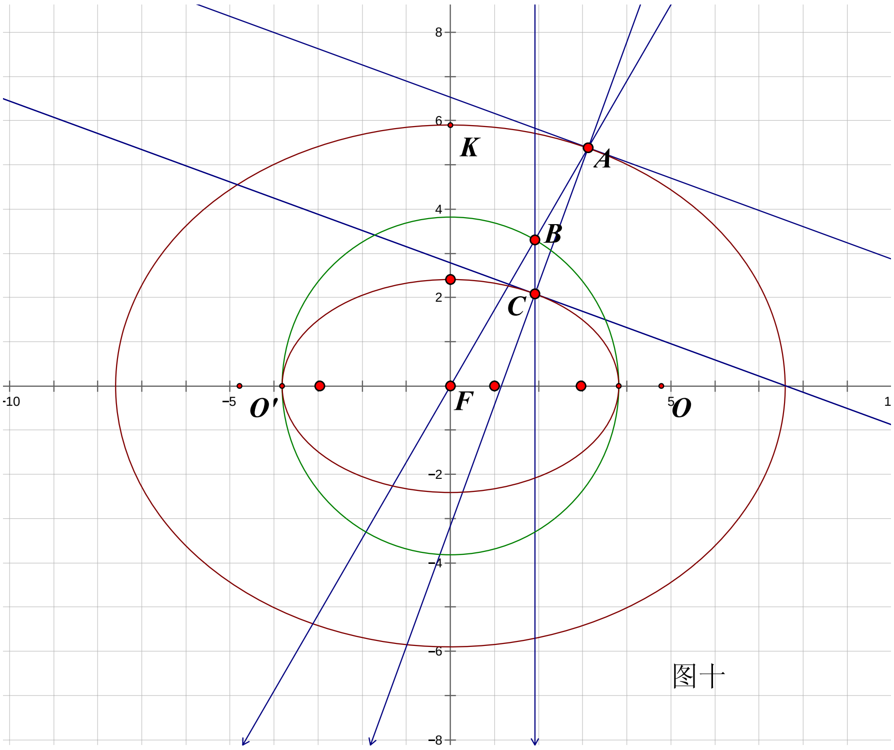
这是一个很简洁的表达式。

但若我们设 $A((a+b)\cos\theta,(a+b)\sin\theta)$，则 $C(a\cos\theta,b\sin\theta)$，(不妨取 $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$)

所求距离 $d=\sqrt{\left[(a+b)\cos\theta-a\cos\theta\right]^2+\left[(a+b)\sin\theta-b\sin\theta\right]^2}$

$=\sqrt{b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta}=\sqrt{c^2\sin^2\theta+b^2}$，这个式子更加简洁。

而对于满足 $x^2+y^2=(a+b)^2$ 的点 A，我们还有一个可以确定所求点 C 的方法，如下：



图十

方法二：

我们希望找到一个椭圆，这样的**椭圆过定点 A，且满足：A 点处的切线与所求点 C 处的切线平行。**

所以我们先设 $A((a+b)\cos\theta,(a+b)\sin\theta)$，则 $C(a\cos\theta,b\sin\theta)$，(不妨取 $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$)

过 A 点且满足上面要求的椭圆的方程为：$\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}=1$

C 处切线方程为：$\frac{x\cos\theta}{a}+\frac{y\sin\theta}{b}=1$

A 处切线为：$\frac{(a+b)x\cos\theta}{m^2}+\frac{(a+b)y\sin\theta}{n^2}=1$

两条直线斜率相同，即为：

$\dfrac{\cos\theta \cdot b}{a\sin\theta}=\dfrac{\cos\theta \cdot n^2}{m^2\sin\theta}$，化简得：$\dfrac{m}{n}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

可以看出来，**我们所需要的新椭圆长轴与短轴之比为已知椭圆长轴与短轴之比的平方根。**

这样反过来，如果我们已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 及其外一点 A（A 在 $x^2+y^2=(a+b)^2$ 上），

我们可以先如上面的比例 $\dfrac{m}{n}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ 做出过 A 的椭圆 $\dfrac{x^2}{m^2}+\dfrac{y^2}{n^2}=1$，再做 A 处的切线 l，将 l 向

下平移至与已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 相切，所得切点即为所求点 C。

我们尝试用同样的办法解决一般的问题，而最后仍然会划归为四次方程。

（二）还有一种特殊的点可以求最值，设点 $A(x_0,y_0)$，点 A 在直线 $l:y=\dfrac{a}{b}x$ 上时，

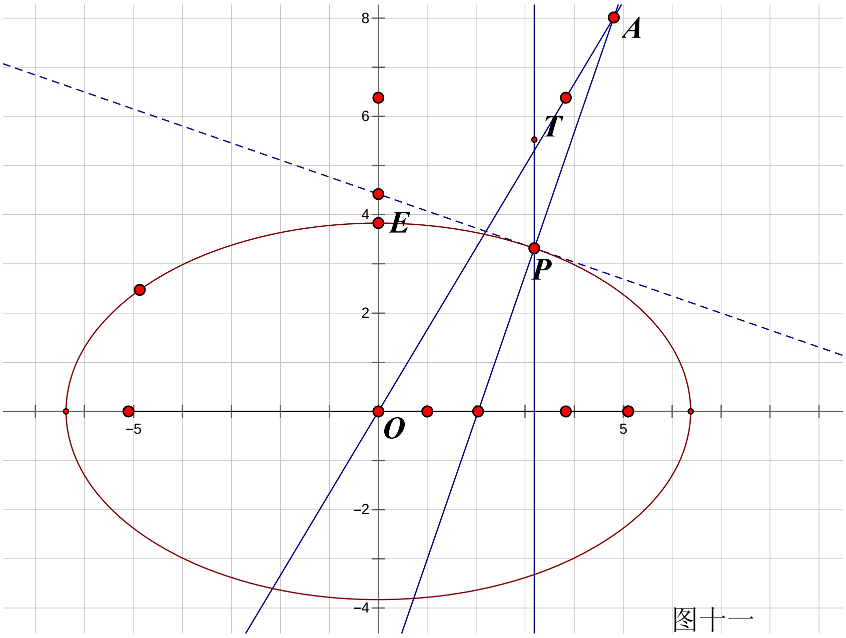
距离最短时，P 点坐标为

$$(a\cos(\arcsin\frac{-2ax_0+\sqrt{4a^2{x_0}^2+4c^4}}{2\sqrt{2}c^2}+\frac{\pi}{4}),b\sin(\frac{-2ax_0+\sqrt{4a^2{x_0}^2+4c^4}}{2\sqrt{2}c^2}+\frac{\pi}{4}))，$$

距离最长时，P' 点坐标为

$$(a\cos(\frac{5\pi}{4}-\arcsin\frac{-2ax_0+\sqrt{4a^2{x_0}^2+4c^4}}{2\sqrt{2}c^2}),b\sin(\frac{5\pi}{4}-\frac{-2ax_0+\sqrt{4a^2{x_0}^2+4c^4}}{2\sqrt{2}c^2}))。$$

如图，设取最小值时所求点为 $P(a\cos\theta,b\sin\theta)$(不妨取 $0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$)，取最大值时所求点为 $P'(a\cos\theta',b\sin\theta')$ (不妨取 $\pi\le\theta\le\dfrac{3\pi}{2}$)如图：



图十一

l_{AP} 与 P 点处切线斜率乘积为 -1，可得方程：

$$\frac{a}{b}\tan\theta=\frac{\frac{a}{b}x_0-b\sin\theta}{x_0-a\cos\theta}$$，即

$$ax_0(\sin\theta-\cos\theta)=c^2\sin\theta\cos\theta$$

设 $t=\sin\theta-\cos\theta$，则原式可化为：

$ax_0t=c^2\cdot\frac{1}{2}\left(-t^2+1\right)$，得 $t=\dfrac{-2ax_0\pm\sqrt{4a^2x_0^{\ 2}+4c^4}}{2c^2}$

而 $t=\dfrac{-2ax_0-\sqrt{4a^2x_0^{\ 2}+4c^4}}{2c^2}$ 并不恒 $\in\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$，所以舍去；

$$t=\frac{-2ax_0+\sqrt{4a^2x_0^{\ 2}+4c^4}}{2c^2}$$

$$\leq\frac{-2ax_0+\sqrt{4a^2x_0^{\ 2}+4c^4+2\sqrt{4a^2x_0^{\ 2}\cdot4c^4}}}{2c^2}=\frac{-2ax_0+2ax_0+2c^2}{2c^2}=1\leq\sqrt{2}$$

且 $t=\dfrac{-2ax_0+\sqrt{4a^2x_0^{\ 2}+4c^4}}{2c^2}>\dfrac{-2ax_0+\sqrt{4a^2x_0^{\ 2}}}{2c^2}=0$，则 $t\in\left(0,\sqrt{2}\right)$

则 $t=\dfrac{-2ax_0+\sqrt{4a^2x_0^{\ 2}+4c^4}}{2c^2}=\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)$

则 $\theta = \arcsin\dfrac{-2ax_0+\sqrt{4a^2{x_0}^2+4c^4}}{2\sqrt{2}c^2}+\dfrac{\pi}{4}$， $\theta' = \dfrac{5\pi}{4}-\dfrac{-2ax_0+\sqrt{4a^2{x_0}^2+4c^4}}{2\sqrt{2}c^2}$

则距离最短时， P 点坐标为

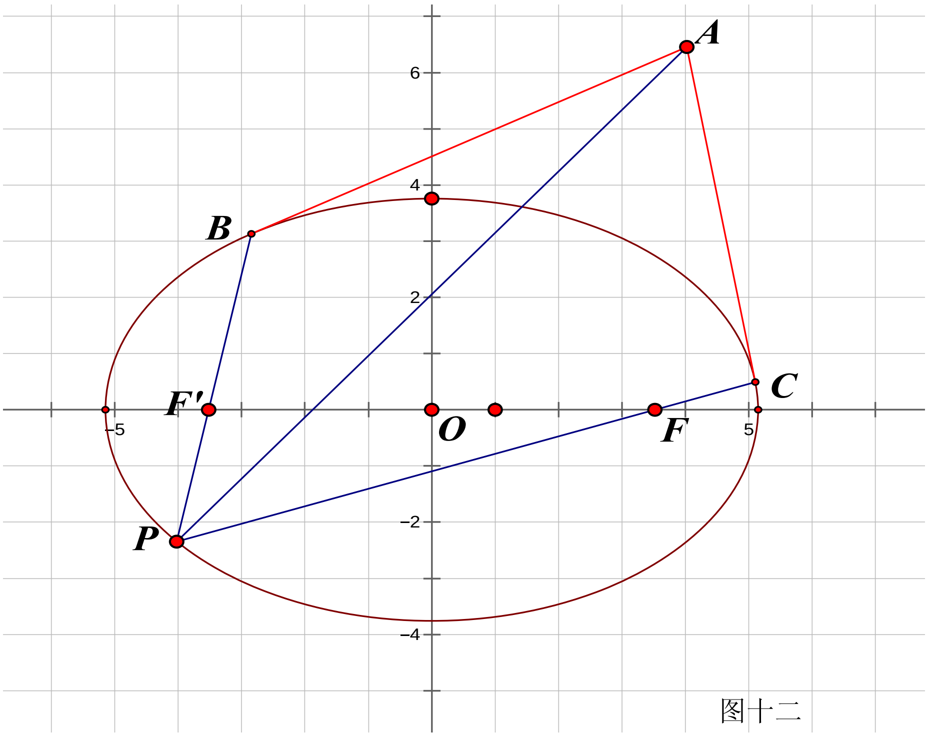
$$(a\cos(\arcsin\frac{-2ax_0+\sqrt{4a^2{x_0}^2+4c^4}}{2\sqrt{2}c^2}+\frac{\pi}{4}), b\sin(\frac{-2ax_0+\sqrt{4a^2{x_0}^2+4c^4}}{2\sqrt{2}c^2}+\frac{\pi}{4})),$$

则距离最长时， P' 点坐标为

$$(a\cos(\frac{5\pi}{4}-\arcsin\frac{-2ax_0+\sqrt{4a^2{x_0}^2+4c^4}}{2\sqrt{2}c^2}), b\sin(\frac{5\pi}{4}-\frac{-2ax_0+\sqrt{4a^2{x_0}^2+4c^4}}{2\sqrt{2}c^2}))$$

（三）当圆外一点 A 在 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{\frac{(a^2+c^2)^2}{b^2}}=1(a>b>0)$ $(x\neq\pm a)$ 上时，点 A 到椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的最大值是可以由作图得出的。

由性质四可知，如果有这样一类点 A，使得如性质四得出的点 D 在椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上，那么如下图所示，作出点 P（相当于性质四中的 D），再过 P 作 AP 的垂线 l，由椭圆的光学性质可知 l 为椭圆在点 P 处得垂线，那么我们就可以看到，$|AP|$ 即为我们所要求的最大值。



图十二

如图，P 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 一点，F',F 分别是椭圆的左、右焦点。分别延长 PF',PF 交椭圆于 B,C .过 B,C 分别作椭圆的切线交于 A 点，则 A 点的轨迹方程为

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\frac{(a^2+c^2)^2}{b^2}}=1(a>b>0).\left(x\neq\pm a\right)$。

证明：如上图，设 P 的坐标为 $(a\cos\theta,b\sin\theta)$；

B 的坐标为 $(a\cos\alpha,b\sin\alpha)$；

C 的坐标为 $(a\cos\beta,b\sin\beta)$.

A 的坐标为 (x,y) .

由 P,F,C 三点共线得：$\frac{b\sin\beta}{a\cos\beta-c}=\frac{b\sin\theta}{a\cos\theta-c}.(c=\sqrt{a^2+b^2})$

整理得：$a\sin(\beta-\theta)=c(\sin\beta-\sin\theta)$

化简得：$\tan\frac{\beta}{2}=\frac{c-a}{c+a}\cot\frac{\theta}{2},\cdots\cdots$①

由 P,F',B 三点共线得：$\frac{b\sin\alpha}{a\cos\alpha-c}=\frac{b\sin\theta}{a\cos\theta+c}.$

化简得：$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{c+a}{c-a}\cot\frac{\theta}{2},\cdots\cdots$②

又直线 BA 的方程为：$\frac{ax\cos\alpha}{a^2}+\frac{by\sin\alpha}{b^2}=1$

又直线 CA 的方程为：$\frac{ax\cos\beta}{a^2}+\frac{by\sin\beta}{b^2}=1$

联立两方程解得：$\frac{x}{a}=\frac{\sin\beta-\sin\alpha}{\sin(\alpha-\beta)}=\frac{-2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}=\frac{-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$

$$=\frac{\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}-1}{1+\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}}.$$

$$\frac{y}{b}=\frac{\cos\beta-\cos\alpha}{\sin(\alpha-\beta)}=\frac{2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}=\frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

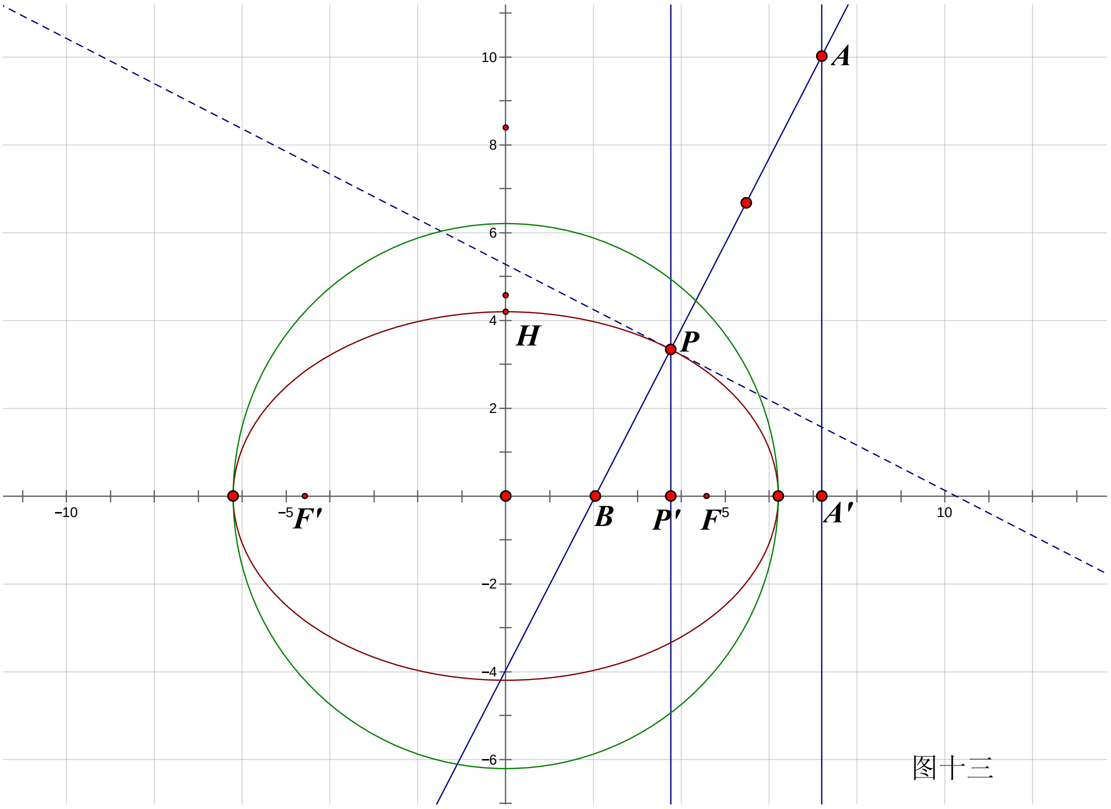
$$=\frac{\tan\frac{\alpha}{2}+\tan\frac{\beta}{2}}{1+\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}}.$$

将①，②代入上式得 $\frac{x}{a}=\frac{\cot^2\frac{\theta}{2}-1}{\cot^2\frac{\theta}{2}+1}\cdots\cdots③$

$$\frac{by}{a^2+c^2}=\frac{2\cot\frac{\theta}{2}}{\cot^2\frac{\theta}{2}+1}\cdots\cdots④$$

两式平方相加得：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\frac{(a^2+c^2)^2}{b^2}}=1(a>b>0)\quad\left(x\neq\pm a\right)$。

（四）对于在 $\frac{x^2}{\left(a+\frac{kb^2}{a}\right)^2}+\frac{y^2}{\left[\left(k+1\right)b\right]^2}=1\ (k>1,k\in R)\ \left(y\neq 0\right)$ 上的点 $A\left(m,n\right)$，到椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的最短距离是 $d=\sqrt{\left(\frac{kb^2}{a^2+kb^2}\right)^2 m^2+\left(\frac{k}{k+1}\right)^2 n^2}$ 。



图十三

如图，设点 A 满足 $\dfrac{|AP|}{|PB|}=k,(k>1,k\in R)$，点 P 为所求点（满足 $\left|AP\right|$ 为点 A 到椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的最短距离），B 为 l_{AP} 与 x 轴交点。不妨取点 A 在第一象限。

设 $P\left(a\cos\theta,b\sin\theta\right)$，$A(m,n)$

过 P，A 作 x 轴的垂线，分别交于 P'，A'。

点 P 处的切线 $l_P:\dfrac{x\cos\theta}{a}+\dfrac{y\sin\theta}{b}=1$，则垂直于 l_P 的直线

$l_{AP}:y=\dfrac{a}{b}\tan\theta\left(x-a\cos\theta\right)+b\sin\theta$ 与 x 轴的交点 B 坐标为 $(\dfrac{c^2}{a}\cos\theta,0)$

$$\frac{|AP|}{|PB|}=k=\frac{|A'P'|}{|BP'|}=\frac{m-a\cos\theta}{a\cos\theta-\frac{c^2}{a}\cos\theta}，\quad \frac{|AB|}{|PB|}=k+1=\frac{|AA'|}{|PP'|}=\frac{n}{b\sin\theta}$$

$\therefore m=\left(a+\dfrac{kb^2}{a}\right)\cos\theta,n=\left(k+1\right)b\sin\theta$，消去 θ，得：

$$\frac{x^2}{\left(a+\frac{kb^2}{a}\right)^2}+\frac{y^2}{\left[(k+1)b\right]^2}=1$$，其中$k>1,k\in R\ (y\neq 0)$。

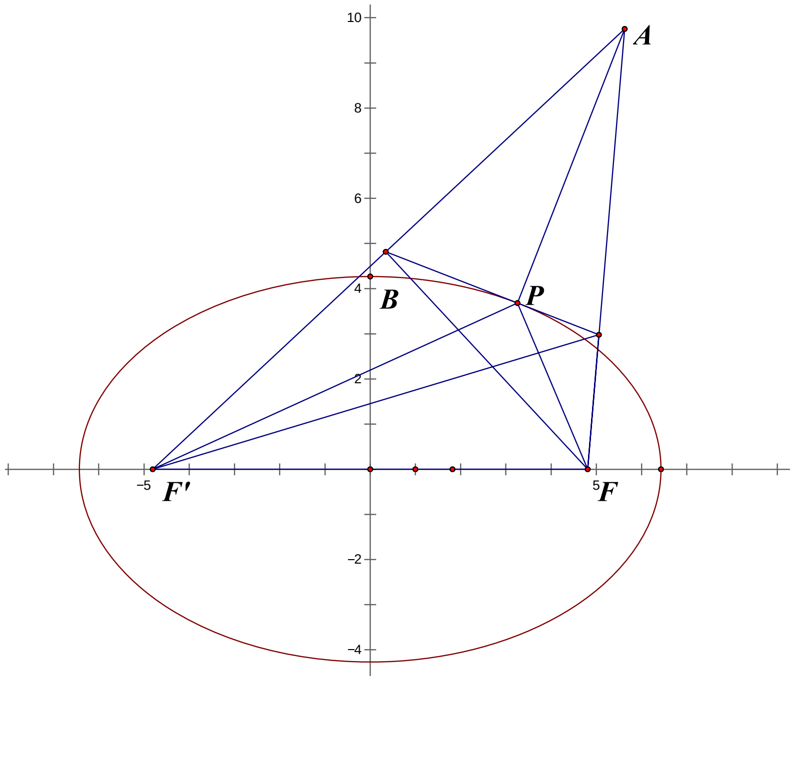
这样如果已知点$A(m,n)$在$\frac{x^2}{\left(a+\frac{kb^2}{a}\right)^2}+\frac{y^2}{\left[(k+1)b\right]^2}=1\ (k>1,k\in R)\ (y\neq 0)$上，则最小值点$P(x_0,y_0)$中，$x_0=\frac{p}{1+\frac{kb^2}{a^2}},y_0=\frac{q}{k+1}$，则最短距离

$$d=\sqrt{\left(\frac{kb^2}{a^2+kb^2}\right)^2 m^2+\left(\frac{k}{k+1}\right)^2 n^2}$$。

我们尝试将这个方法拓展到一般情况，那么就相当于对于$\forall A(m,n)(m>0,n>0)$，$\exists k$使得$\frac{m^2}{\left(a+\frac{kb^2}{a}\right)^2}+\frac{n^2}{\left[(k+1)b\right]^2}=1\ (y\neq 0)$，很容易看出，这又是一个关于$k$的四次方程。

四、一般的点到椭圆的最短（长）距离

在经历了代数—几何—代数—几何的历次尝试后，我们认识到了纯几何的方法不能将椭圆的性质完全反映出来，而代数的方法不能纠缠在求解最值点的坐标上!因为所有的关于最值点的坐标的方程都是四次的！必须另辟蹊径。终于我们找到了一个很好的解题路线，最终从根本上解决了这两个最值问题。



图十四

引理：若 P 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上一点，F',F 分别是左，右焦点。

且 $\angle PF'F=\alpha,\angle PFF'=\beta$.

则 $\tan\frac{\alpha}{2}\cdot\tan\frac{\beta}{2}=\frac{1-e}{1+e}$.

其中 $e=\frac{c}{a},c=\sqrt{a^2+b^2}$

证明：在△ $F'PF$ 中，设 $|PF'|=r_1,|PF|=r_2$.

由正弦定理：$\frac{r_1}{\sin\beta}=\frac{r_2}{\sin\alpha}=\frac{2c}{\sin(\alpha+\beta)}$；

由等比定理：$\frac{r_1}{\sin\beta}=\frac{r_2}{\sin\alpha}=\frac{r_1+r_2}{\sin\alpha+\sin\beta}=\frac{2a}{\sin\alpha+\sin\beta}$.

故有：$\frac{2c}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{2a}{\sin\alpha+\sin\beta}$.

所以：$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha+\sin\beta}=\frac{c}{a}=e.$

既：$\frac{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}=e.$

既：$\frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}=e\Rightarrow\frac{1-\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}}{1+\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}}=e$.

解得：$\tan\frac{\alpha}{2}\cdot\tan\frac{\beta}{2}=\frac{1-e}{1+e}$.

定理 1（最小值定理）：

若 $A(x_0,y_0),(x_0>0,y_0>0)$ 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 外一点，F',F 分别是左，右焦点。P 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上一点，$|AP|$ 是 A 到椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上动点距离的最小值，$\angle PF'F=\alpha$ 则 $\alpha=2\arctan\frac{\mu+\sqrt{\mu^2+4t}}{2}$.

其中 $\mu=\dfrac{2a-\left(d_1\cos F'+d_2\cos F\right)-(2a+d_1\cos F'+d_2\cos F)t}{\left(d_1\sin F'-d_2\sin F\right)}$； $t=\dfrac{1-e}{1+e}$.

$d_1=|AF'|, d_2=|AF|; F'=\angle AF'F, F=\angle AFF'.$

证：如图 14，当直线 AP 平分 $\angle F'PF$ 时，P 是 A 到椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上动点距离的最小值点。设 $\angle PF'F=\alpha$ ， $\angle PFF'=\beta$ ，（以下确定 α ）

此时

$$\angle F'PA=\angle FPA=\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha+\beta}{2}, \angle F'AP=\frac{\pi}{2}-F'+\frac{\alpha-\beta}{2}, \angle FAP=\frac{\pi}{2}-F-\frac{\alpha-\beta}{2}$$

在△ $F'PA$ 中由正弦定理： $\dfrac{\sin\angle F'AP}{\sin\angle APF'}=\dfrac{|PF'|}{|AF'|}=\dfrac{r_1}{d_1}$；

在△ FPA 中由正弦定理： $\dfrac{\sin\angle FAP}{\sin\angle APF}=\dfrac{|PF'|}{|AF'|}=\dfrac{r_2}{d_2}$.

而 $r_1+r_2=2a.$

$\therefore \dfrac{\sin\angle F'AP}{\sin\angle APF'}\cdot d_1+\dfrac{\sin\angle FAP}{\sin\angle APF}\cdot d_2=2a$；

既 $\dfrac{\sin(\frac{\pi}{2}-F'+\frac{\alpha-\beta}{2})}{\sin(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha+\beta}{2})}\cdot d_1+\dfrac{\sin(\frac{\pi}{2}-F-\frac{\alpha-\beta}{2})}{\sin(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha+\beta}{2})}\cdot d_2=2a$；

整理为： $d_1\cos(F'-\dfrac{\alpha-\beta}{2})+d_2\cos(F+\dfrac{\alpha-\beta}{2})=2a\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$；

既 $(d_1\cos F'+d_2\cos F)\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}+\left(d_1\sin F'-d_2\sin F\right)\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}=2a\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$；

$$(d_1\cos F'+d_2\cos F)(\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2})$$
$$+\left(d_1\sin F'-d_2\sin F\right)(\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}-\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2})$$
$$=2a(\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2});$$

两边除以 $\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\beta}{2}$ 得:

$$(d_1\cos F'+d_2\cos F)(1+\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2})$$
$$+\left(d_1\sin F'-d_2\sin F\right)(\tan\frac{\alpha}{2}-\tan\frac{\beta}{2})$$
$$=2a(1-\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2});$$

由引理知 $\tan\frac{\alpha}{2}\cdot\tan\frac{\beta}{2}=\frac{1-e}{1+e}$ 并设 $\tan\frac{\alpha}{2}=x,\tan\frac{\beta}{2}=y,\frac{1-e}{1+e}=t.$

$$x-y=\frac{2a-\left(d_1\cos F'+d_2\cos F\right)-(2a+d_1\cos F'+d_2\cos F)t}{\left(d_1\sin F'-d_2\sin F\right)}=\mu\text{；}$$

再注意到：$xy=t,x>0,y>0$；

$\therefore x,-y$是方程$\lambda^2-\mu\lambda-$t=0 的两根，

其中 x是方程$\lambda^2-\mu\lambda-$t=0 的正根，$-y$是方程$\lambda^2-\mu\lambda-$t=0 的负根。

$$\therefore x=\frac{\mu+\sqrt{\mu^2+4t}}{2},y=\frac{-\mu+\sqrt{\mu^2+4t}}{2}.$$

$$\alpha=2\arctan\frac{\mu+\sqrt{\mu^2+4t}}{2}.$$

其中 $\mu=\frac{2a-\left(d_1\cos F'+d_2\cos F\right)-(2a+d_1\cos F'+d_2\cos F)t}{\left(d_1\sin F'-d_2\sin F\right)}$.

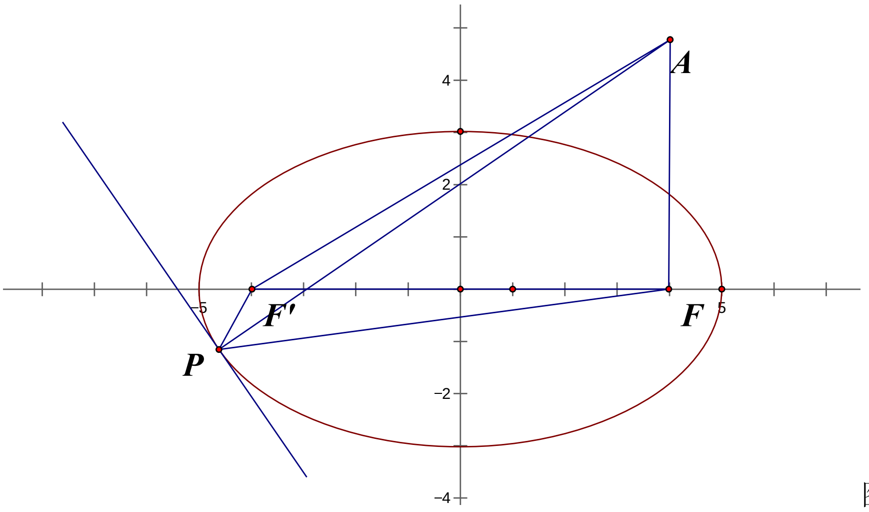
这样进一步可求 P 的坐标。

定理 2（最大值定理）：

若 $A(x_0,y_0),(x_0>0,y_0>0)$ 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 外一点，F',F 分别是左，右焦点。P 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上一点，$|AP|$是 A 到椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$上动点距离的最大值，$\angle PF'F=\alpha$ 则 $\alpha=2\arctan\frac{\mu+\sqrt{\mu^2+4t}}{2}$.

其中 $\mu=\frac{2a-\left(d_1\cos F'+d_2\cos F\right)-(2a+d_1\cos F'+d_2\cos F)t}{\left(d_1\sin F'-d_2\sin F\right)}$；$t=\frac{1-e}{1+e}$.

$d_1=|AF'|,d_2=|AF|;F'=\angle AF'F,F=\angle AFF'.$



图十五

证：如图 15，当直线 AP 平分 $\angle F'PF$ 时，P 是 A 到椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上动点距离的最大值点。设 $\angle PF'F=\alpha$，$\angle PFF'=\beta$，（以下确定 α ）

此时

$$\angle F'PA=\angle FPA=\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha+\beta}{2},\angle F'AP=\frac{\pi}{2}-F'-\frac{\alpha-\beta}{2},\angle FAP=\frac{\pi}{2}-F'+\frac{\alpha-\beta}{2}$$

在△ $F'PA$ 中由正弦定理：$\dfrac{\sin\angle F'AP}{\sin\angle APF'}=\dfrac{|PF'|}{|AF'|}=\dfrac{r_1}{d_1}$；

在△ FPA 中由正弦定理：$\dfrac{\sin\angle FAP}{\sin\angle APF}=\dfrac{|PF'|}{|AF'|}=\dfrac{r_2}{d_2}$.

而 $r_1+r_2=2a.$

$\therefore \dfrac{\sin\angle F'AP}{\sin\angle APF'}\cdot d_1+\dfrac{\sin\angle FAP}{\sin\angle APF}\cdot d_2=2a$；

既 $\dfrac{\sin(\frac{\pi}{2}-F'-\frac{\alpha-\beta}{2})}{\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha+\beta}{2})}\cdot d_1+\dfrac{\sin(\frac{\pi}{2}-F+\frac{\alpha-\beta}{2})}{\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha+\beta}{2})}\cdot d_2=2a$；

整理为：$d_1\cos(F'+\dfrac{\alpha-\beta}{2})+d_2\cos(F-\dfrac{\alpha-\beta}{2})=2a\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$；

既 $(d_1\cos F'+d_2\cos F)\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}+\left(d_2\sin F-d_1\sin F'\right)\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}=2a\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$；

$$(d_1\cos F' + d_2\cos F)(\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2})$$

$$+\left(d_2\sin F - d_1\sin F'\right)(\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} - \sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2})$$

$$= 2a(\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2});$$

两边除以 $\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}$ 得:

$$(d_1\cos F' + d_2\cos F)(1 + \tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2})$$

$$+\left(d_2\sin F - d_1\sin F'\right)(\tan\frac{\alpha}{2} - \tan\frac{\beta}{2})$$

$$= 2a(1 - \tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2});$$

由引理知 $\tan\frac{\alpha}{2}\cdot\tan\frac{\beta}{2} = \frac{1-e}{1+e}$ 并设 $\tan\frac{\alpha}{2} = x, \tan\frac{\beta}{2} = y, \frac{1-e}{1+e} = t.$

$$x - y = \frac{2a - \left(d_1\cos F' + d_2\cos F\right) - (2a + d_1\cos F' + d_2\cos F)t}{\left(d_2\sin F - d_1\sin F'\right)} = -\mu;$$

再注意到： $xy = t, y > 0$；

$\therefore x, -y$ 是方程 $\lambda^2 + \mu\lambda - \text{t}=0$ 的两根，

其中 x 是方程 $\lambda^2 + \mu\lambda - \text{t}=0$ 的正根，$-y$ 是方程 $\lambda^2 + \mu\lambda - \text{t}=0$ 的负根。

$$\therefore x = \frac{-\mu + \sqrt{\mu^2 + 4t}}{2}, y = \frac{\mu + \sqrt{\mu^2 + 4t}}{2}.$$

$$\alpha = 2\arctan\frac{-\mu + \sqrt{\mu^2 + 4t}}{2}.$$

其中 $-\mu = \frac{2a - \left(d_1\cos F' + d_2\cos F\right) - (2a + d_1\cos F' + d_2\cos F)t}{\left(d_2\sin F - d_1\sin F'\right)}$.

之后，我们便可以计算出 $|AP|$ 的长度，即最短（长）距离。

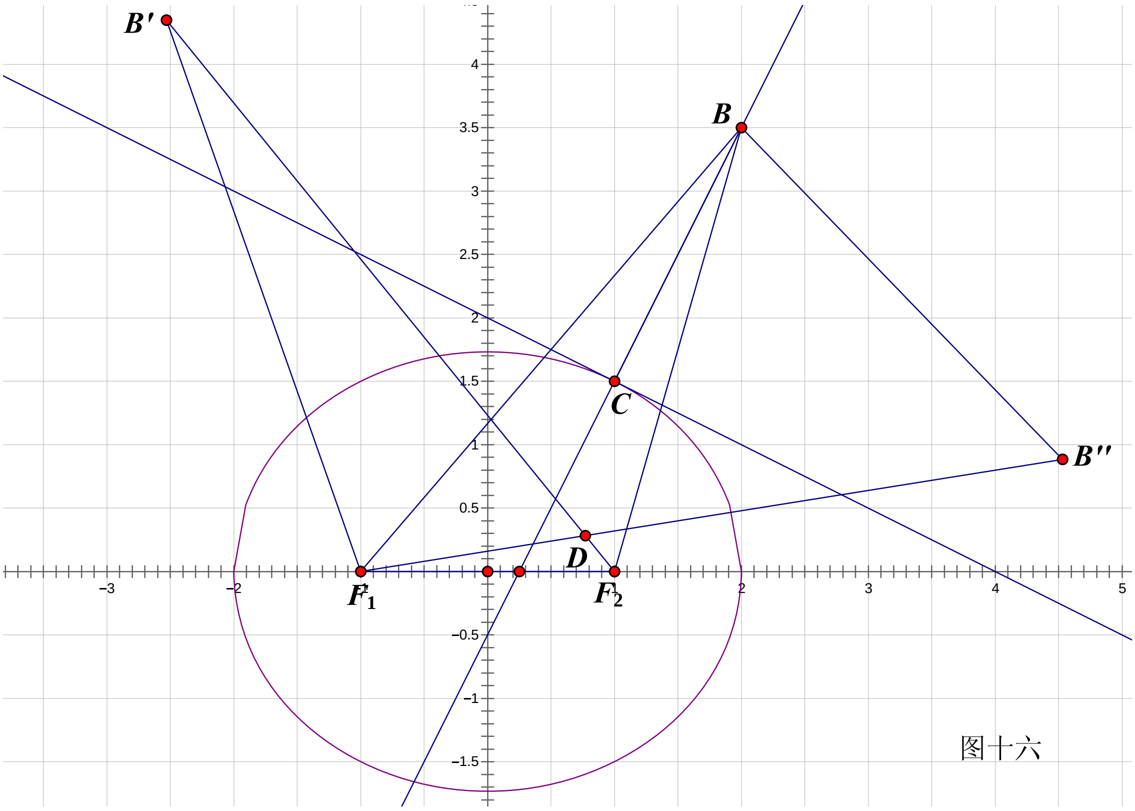
附：

我们在网上查到有费马点是极值点（因为费马点为三角形内到三顶点距离最小的点，所以很容易联想到费马点）的证明，（例如 http://www.hudong.com/wiki/%E8%B4%B9%E9%A9%AC%E7%82%B9 中的探究二中，认为费马点即为下图中 C 点），下面给出证明**费马点 D 既不是椭圆上 C 点，也不在 BC 的连线上，即无法通过费马点来找出 C 点。**

事实上，如图所示：

F_1，F_2 为椭圆焦点，B 为定点，C 为椭圆上一点，直线 BC 垂直于 C 点切点（即 BC 为所求最短距离）。将 BF_1 以 F_1 为旋转中心旋转 60° 得到 B'，将 BF_2 以 F_2 为旋转中心旋转 60° 得到 B''，F_1B'' 与 F_2B' 交与点 D，点 D 即为费马点，可以看到点 D 并不在直线 BC 上。

下面我们来举一个反例说明费马点并不一定在我们所求的直线 l_{BC} 上。



图十六

取椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$，和椭圆上一点 $C\quad(1,\dfrac{3}{2})$

则 C 点切线方程为 $\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{2}=1$，则 $l_{BC}: y=2x-\dfrac{1}{2}$

取 l_{BC} 上一点 $B\quad(1,\dfrac{3}{2})$，则 $\overrightarrow{F_1B}=(3,\dfrac{7}{2});\overrightarrow{F_2B}=(1,\dfrac{7}{2})$

若设$\overrightarrow{F_1B}$对应的复数为$z_1=3+\frac{7}{2}i$，设$\overrightarrow{F_2B}$对应的复数为$z_2=1+\frac{7}{2}i$

则$\overrightarrow{F_1B}$对应的复数$z_3=(3+\frac{7}{2}i)\cdot(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)=(\frac{3}{2}-\frac{7\sqrt{3}}{4})+(\frac{7}{4}+\frac{3\sqrt{3}}{2})i$

$\overrightarrow{F_2B}"$对应的复数$z_4=(1+\frac{7}{2}i)\cdot(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)=(\frac{1}{2}+\frac{7\sqrt{3}}{4})+(\frac{7}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2})i$

$\therefore \overrightarrow{F_1B'}=(\frac{3}{2}-\frac{7\sqrt{3}}{4},\frac{7}{4}+\frac{3\sqrt{3}}{2});\overrightarrow{F_2B''}=(\frac{1}{2}+\frac{7\sqrt{3}}{4},\frac{7}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2})$

$\therefore B'$坐标为$(\frac{1}{2}-\frac{7\sqrt{3}}{4},\frac{7}{4}+\frac{3\sqrt{3}}{2})$；$B''$的坐标为$(\frac{3}{2}+\frac{7\sqrt{3}}{4},\frac{7}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2})$

$$l_{F_2B'}:y=\frac{\frac{7}{4}+\frac{3\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}-\frac{7\sqrt{3}}{4}-1}(x-1)=-\frac{7+6\sqrt{3}}{2+7\sqrt{3}}(x-1);$$

则

$$l_{F_1B''}:y=\frac{\frac{7}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{2}+\frac{7\sqrt{3}}{4}+1}(x+1)=\frac{7-2\sqrt{3}}{10+7\sqrt{3}}(x+1)$$

将上面两式联立得到$\begin{cases}x=\dfrac{64\sqrt{3}+224}{154\sqrt{3}+168}\approx 0.7702\\ y=\dfrac{218\sqrt{3}+392}{154\sqrt{3}+168}\cdot\dfrac{7-2\sqrt{3}}{10+7\sqrt{3}}\approx 0.2829\neq 2x-\dfrac{1}{2}\approx 2.0405\end{cases}$

当我们反思这个问题时，想到费马点虽然是到三个顶点距离最短的点，但是我们这里到两个定点的距离和是一定的，所以费马点并不一定满足。

参考文献：

［1］[俄罗斯]波拉索洛夫 编著，周春荔 译，俄罗斯平面几何问题集 哈尔滨工业大学出版社
［2］沈文选 张垚 冷岗松 奥林匹克数学中的几何问题 湖南师范大学出版社
［3］丘成桐 主编 第一届丘成桐中学数学奖获奖论文集 高等教育出版社
［4］［法］笛卡尔 著 笛卡尔几何 北京大学出版社

结束语：

本文题目是我们的数学老师在讲椭圆时的一道题目的引申。原题是：求 $A(0,4)$ 到椭圆 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 上的动点的距离的最值。由于点 A 在坐标轴上，直接求最值就能解决。但是课堂上讨论时同学提出了如果点 A 不在椭圆的对称轴上时，该如何解决，就将我们的数学李老师（一个颇善解题的奥林匹克教练员）整整挂了一节课。下课后李老师将此题设为了那一周的有奖征答。但无人解出。我们三个人便和李老师一起进行了长达三个月的研究。我们试图找到一种代数或几何的方程（一种绕过解四次方程或者用《笛卡尔几何》中介绍的尺规作四次方程的根的方法）。但是最终未能找到。不过却在过程中发现了一些简洁的或很美丽的与椭圆有关的性质。更重要的是，我们从中学会了一点数学研究的方法。每当我们发现了其中的一个美妙的结论时，我们都异常兴奋，真正让我们体会到了数学之美和数学带给我们的快乐。今后我们还将继续对它的研究，直至问题得到满意的解决。感谢每一位参与讨论的同学和老师，感谢十一学校给我们创造的研讨氛围和良好环境。